

23 Introdução à Álgebra Tensorial

1. O tensor de condutividade elétrica de um certo cristal possui os coeficientes a seguir em relação aos eixos x_1, x_2, x_3 :

$$\sigma(\Omega^{-1}m^{-1}) = \begin{bmatrix} 25 \times 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 \times 10^7 & -3(\sqrt{3}) \times 10^7 \\ 0 & -3(\sqrt{3}) \times 10^7 & 13 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

Suponha que o sistema de referência se transforme em x'_1, x'_2, x'_3 pela rotação indicada a seguir

$$x'_1 O x_1 = 0^\circ \quad x'_2 O x_2 = 30^\circ \quad x'_2 O x_3 = 60^\circ \quad x'_3 O x_3 = 30^\circ$$

Verifique que a soma dos quadrados de a_{ij} em cada linha e em cada coluna da matriz de transformação dos sistemas de referência é 1. Verifique também que o produto de duas linhas ou duas colunas quaisquer da matriz de transformação é 0.

2. Determine os valores da componente σ'_{ij} no novo sistema de referência e comente os resultados obtidos.
3. Desenhe sobre os novos eixos x'_2, x'_3 uma seção do elipsóide de condutividade (representação quadrática) no plano $x'_1 = 0$. Note que trata-se de uma seção principal. Insira os eixos iniciais x_2, x_3 sobre o desenho.
4. Desenhe um vetor radial \vec{OP} seguindo a direção na qual os cossenos referentes aos eixos iniciais valem $(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Meça o comprimento do vetor radial e encontre a condutividade elétrica segundo esta direção.
5. Verifique o resultado anterior usando uma expressão analítica.
6. Admitindo que um campo elétrico de 1 volt/m seja estabelecido segundo a direção \vec{OP} , calcule as componentes E_i do campo ao longo dos eixos x_i . Em seguida calcule as componentes J_i da densidade de corrente ($\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow J_i = \sigma_{ij} E_j$).
7. Utilize as componentes J_i e desenhe um diagrama vetorial sobre os eixos x_1, x_2, x_3 , em seguida determine graficamente a amplitude e a direção da densidade de corrente resultante.
8. Admitindo que o mesmo campo elétrico do item (6), refaça os mesmos cálculos do item (6) e repita a construção do item (7) utilizando os eixos x'_i no lugar dos eixos x_i , assim como os valores de σ'_{ij} encontrados no item (2). Compare os resultados com aqueles obtidos em (7).

9. Compare a direção da corrente resultante com aquela da normal ao elipsóide de condutividade no ponto P .
10. Encontre graficamente a componente a da resultante da densidade de corrente ao longo de \vec{OP} e em seguida determine σ nesta direção . Compare o resultado obtido com aquele encontrado em (4) e (5).